SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Series

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

SUMATORIA

Sean las expresiones $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n$. La suma de estos puede ser expresada mediante una notación abreviada:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Ejemplo

- $\sum_{k=1}^{3}(5x+4) = (5.1+4) + (5.2+4) + (5.3+4)$

  $= 42$

PROPIEDADES

1. $$\sum_{k=1}^{n} Ca_k = C\sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. $$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Ejemplo

- $\sum_{k=1}^{6} 3k^2 = 3\sum_{k=1}^{6} k^2$

- $\sum_{k=1}^{7}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{7} k^2 + \sum_{k=1}^{7} k$

SUMAS NOTABLES

1. $$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ sumandos}} = c.n$$

- $\sum_{k=1}^{10} 15 = \underbrace{15 + 15 + 15 + \cdots + 15}_{10 \text{ sumandos}} = 15 \cdot 10$

  $= 150$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

2. $$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

- $$\sum_{n=0}^{10} 2^n =$$

- $$\sum_{n=0}^{20} (-3)^n =$$

- $$\sum_{k=3}^{10} \left(\frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1} \right) =$$

- $$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2 + k} \right) =$$

3. Propiedad telescópica.

$$\sum_{k=m}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(m)$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación:

Considere

$$a(n)=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots}_{n-1\ sumandos}$$

Determine el valor de $a(50)-0{,}01$.

$A)\ 0{,}96$ $B)\ 0{,}98$ $C)\ 0{,}95$ $D)\ 0{,}99$ $E)\ 0{,}97$

UNI_2022_I

Resolución:

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN

Dada la sucesión de infinitos números reales $(a_n) = (a_1;\ a_2;\ a_3; \ldots;\ a_n; \ldots)$. La sucesión de sumas parciales se define como

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\vdots$$

Enésima suma parcial

A partir de ellos se forma la sucesión de sumas parciales

$$(S_n) = (a_1;\ a_1 + a_2;\ a_1 + a_2 + a_3;\ \ldots;\ S_n;\ \ldots)$$
$$(S_n) = (S_1;\ S_2;\ S_3;\ \ldots;\ S_n;\ \ldots)$$

Ejemplo

Sea la sucesión $(a_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4};\ \ldots\right)$

Las sumas parciales de la sucesión son:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
$$\vdots$$

Luego se forma la sucesión de sumas parciales

$$(S_n) = \left(1;\ 1 + \frac{1}{2};\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3};\ \ldots;\ S_n;\ \ldots\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$
$$S_1;\quad S_2;\quad S_3;\quad \ldots$$

SERIES

Una serie se forma por la suma de los infinitos términos de la sucesión $\{a_n\}$ y se denota por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots$$
- $$\sum_{n=1}^{+\infty} (2n) = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots$$
- $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Convergencia de una serie

Se dirá que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si la sucesión de suma parciales (S_n) converge, es decir:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Ejemplos

Analice la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2 + k}\right)$

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

- Analice la convergencia de la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Resolución

- Analice la divergencia de la serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n$

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SERIES NOTABLES

Serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty$$

La serie armónica es divergente.

Serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

r : razón

I. Si $-1 < r < 1$, entonces la serie converge

$$\boldsymbol{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}}$$

II. Si $|r| \geq 1$, entonces la serie diverge

Ejemplos

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} =$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n =$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n =$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n =$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación:

El valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(0.2)^n$$

es igual a

$A)$ 0,26 $B)$ 0,30 $C)$ 0,25 $D)$ 0,28 $E)$ 0,27

UNI 2022-I

Solución:

Serie -p:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\ldots$$

I) Si $p>1$, la serie-p es convergente.

II) Si $p\leq 1$, la serie-p es divergente.

Ejemplos

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=$

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Serie telescópica:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_0)$$

Ejemplo

Calcule el valor de convergencia de:

$$S = \sum_{k=3}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{k+1} - \cos\frac{\pi}{k}\right)$$

Resolución

Series notables

- $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Propiedades

Si: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergente

1. $\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ; c \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Ejemplos

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

Teorema

Si: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Criterio de convergencia

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie

Si: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos

- Analice la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe